Cálculo Numérico – Versão Atualizada

2. Teoria dos Erros

- Aritmética de Ponto Flutuante

**2.1. Representação Numérica nas Máquinas Computacionais**

dt = Número de dígitos

e = Expoente

Número = (0,d1d2...dt) x Be

B = Base

Mantissa

Aonde:

d1 ≠ 0;

exp ϵ [m, M] ; m = limitante inferior do expoente; M = limitante superior do expoente

Nota: Máquina Computacional tem memória finita

**Exercícios 1):** Represente os números abaixo em aritmética de ponto flutuante. Considere t = 3 dígitos no sistema computacional.

1. 235,89(10) =
2. 101,01(2) =
3. 0,000875(10)=

**2.2. Arredondamento e Truncamento de Aritmética de Ponto Flutuante**

***Tipos de Arredondamento:*** Matemático; Estatístico e ABNT.

**Critério Matemático:**

Quando a casa decimal seguinte àquela que vamos arredondar for 0, 1, 2, 3 ou 4, esta casa decimal permanece como está. Se a casa decimal seguinte for 5, 6, 7, 8 ou 9, somamos 1 à casa decimal a ser arredondada.

Ex.: a) 0,78645(10)= 0,786;

b) 0,4545(10)=0,455

c) 0,4575(10)=0,458

d) 0,4548(10)=0,455

**Critério Estatístico:**

Esse procedimento é denominado arredondamento e, conforme resolução 886/66 da fundação IBGE deve seguir os seguintes critérios:

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4, não se altera o último algarismo a permanecer.

Exemplos: Se temos 25,62489 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 4, ficando 25,62

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 6, 7, 8 ou 9, aumenta-se em uma unidade o último algarismo a permanecer.

Exemplo: Se temos 75,24623 e queremos deixar com duas casas decimais, abandonamos os algarismos a partir do 6 porém, aumentamos uma unidade ao 4 que é o último algarismo a permanecer. Ficando 75,25.

• Quando o primeiro algarismo a ser abandonado for o 5, temos que observar o seguinte: a) se após o 5 aparecer, em qualquer casa decimal, pelo menos um algarismo diferente de zero, aumenta-se uma unidade ao último algarismo a permanecer.

Exemplos: 54,265003 fica 54,27

12,4851 fica 12,49

b) se após o 5 não aparecer mais nenhum algarismo ou se aparecer apenas zero, somente será acrescentado uma unidade ao último algarismo a permanecer se ele for ímpar.

Exemplos: 18,145 fica 18,14

28,4650000 fica 28,46

41,375 fica 41,38

0,775000 fica 0,78

**Critério ABNT:**

Verifica o dígito posterior ao dígito a ser arredondado, se for > 5, então (soma +1);

Se for < 5, então (mantém o dígito)

Se for =5, então ( Se o dígito anterior for ímpar, soma + 1, ao dígito anterior. Se o dígito anterior for par, mantém o dígito anterior).

**Exercícios 2):** Calcule o arredondamento e truncamento da máquina computacional. Considere **t = 3 dígitos**, numa **base B = 10**, em uma máquina que opera com **Padrão ABNT** de arredondamento.

1. 235,89(10) =
2. 235,39(10)=
3. 235,59(10)=
4. 234,59(10)=
5. 12,76(10)=
6. 12,74(10)=

**2.3. Overflow e Underflow - SPF (Sistema de Ponto Flutuante)**

t = Número de dígitos

SPF(B, t, m, M) exp ϵ [m;M], máquina opera por arredondamento ABNT

B = Base

**Exercícios 3):** Calcule se no SPF ocorreu: Overflow, Underflow ou Nem Overflow / Nem Underflow. Considere B = 10, t = 3, exp ϵ[-5;5]

1. 235,89(10)=
2. 0,345 x 10-7=
3. 0,875 x 109=

**2.4. Representação de Palavra de 16bits**

Nota: Existe também representação de palavra: 32bits, 64bits, 128bits.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|  |  | Expoente (Posição 2 a 5) |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Sinal do expoente (Posição 1)

Mantissa (Posição 6 a 15)

Sinal do número (Posição 0)

Nota: O que a máquina computacional faz. Ela pega o número que está representado em uma base qualquer, transforma em um sistema binário e em seguida transforma em aritmética de ponto flutuante, (sistema binário).

Representação do sinal: 0 (positivo); 1 (negativo)

Ex.: 5,75(10)= 101,11(2) => 0,10111 x 211

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Exercício:** a) 12,25(10) = 1100,012 = 0,110001 x 2100

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**2.5. Erro Absoluto e Relativo**

**Erro Absoluto (EA):**

EA = |X – Xa|

X = Valor exato ou valor original;

Xa = Valor aproximado

**Erro Relativo (ER):**

ER =

**Erro Relativo (ER) em percentual:**

ER = \*100

Exemplo: Área do Círculo

R = 100m; π1 = 3,14 Valor aproximado; π2 = 3,141592 Valor original.

(Área da circunferência)

A1= π1 x R2 = 3,14 x 1002=> A1= 31400m2

A2=π2 x R2 => 3,141592 x 1002 => A2=31415,92m2

EA = |A2 – A1| = | 31415,92 – 31400| = 15,92m2

ER = = 15,92 / 31400 => ER = 5,07 x 10-4m2

**Exercícios 4):** Calcule o erro absoluto (EA) e o erro relativo (ER) dos valores abaixo:

1. Sejam os valores X=0.000006 e X’=0.000004

**EA = |0.000006 - 0.000004| => EA= 0.000002; => EA = 2 x 10-6;**

**ER = EA/X’; EA = 0.000002 / 0.000004 => ER = 0.5 x 10-6**

1. Seja P=π e P’= 3,1416; (π = **3,141592653589793**)

**EA = |3,141592653589793 - 3,1416| = EA = 0,000007347 => EA = 7,347 x 10-6**

**ER = EA/P’; ER = 0,000007347 / 3,1416 => ER = 0,000002338 => ER = 2,338 x 10-6**

1. Seja V = 40320 e V’= 40319,958

**EA = |40320 - 40319,958| = EA = 0.042; => EA = 4,2 x 10-2;**

**ER = EA/V’; EA = 0.042 / 40319,958 => ER = 0,000001041 => ER = 1,041 x 10-6;**

**2.6. Máximo Erro Relativo de Arredondamento (Propagação de erro)**

(Análise de Erros nas Operações Aritméticas de Ponto Flutuante)

Onde: RA = , porque o erro sempre aumenta.

Nota: Os números são considerados exatamente representados, quando ERx=0; ERy=0;

Os cálculos são efetuados em pares.

Adição

Subtração

Divisão

Multiplicação

**Exercícios 5):** Calcule as operações aritméticas abaixo. A máquina opera por arredondamento ABNT e está exatamente representada.

Dados: X = 0,937 x 104; Y = 0,1272 x 102; Z = 0,231 x 101; t = 4 dígitos.

1. |E(x+y+z)|=?

S1 = (X + Y) = 0,937 x 104 + 0,001272 x 104 => S1 = 0,938272 \* 104

S1 + Z => 0,938272 \* 104 + 0,000231 x 104

S2 = S1+ Z = 0,938503 x 104.

ER(X+Y) = ERX + ERY + RA

=> \*

Dados: X = 0,937 x 104; Y = 0,1272 x 102; Z = 0,231 x 101; t = 4 dígitos.

1. =?

S1 = (X + Y) = 0,937 x 104 + 0,001272 x 104 => S1 = 0,938272

S1 + Z => 0,938272 + 0,000231 x 104

S2 = S1+ Z = 0,938503 x 104.

ER(X+Y) = ERX + ERY + RA

=> =>

**Respostas**

**Exercícios 1)**

1. 0,23589 x 103; b) 0,10101 x 211 c) 0,875 x 10-3

**Exercícios 2)**

1. 0,236x103(A); 0,235 x 103 (T)
2. 0,235x103(A); 0,235x103 (T)
3. 0,236x103(A); 0,235x103 (T)
4. 0,234x103(A); 0,234x103 (T)
5. 0,128x102(A); 0,127x102 (T)
6. 0,127x102(A); 0,127x102 (T)

**Exercícios 3)**

1. 0,236x103; 3 ϵ [-5;5] => Nem Overflow / Nem Underflow
2. 0,345x10-7; -7 ɇ [-5;5] => Underflow
3. 0,875x109; 9 ɇ [-5;5] => Overflow

**Exercícios 4)**

1. Erro absoluto é de 2x10-6 e o erro relativo é de 0,5 x 10-6
2. Erro absoluto é de 7,347x10-6 e o erro relativo é de 2,338x10-6
3. Erro absoluto é de 4,2x10-2 e o erro relativo é de 1,041x10-6

**Exercícios 5)**

1. 9,9987x10-4
2. 10-3